

### 3.3 指数函数

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 小组\_\_\_\_\_

#### 一、学习目标

学习指数函数的概念、图像及性质,能用“描点法”画出指数函数的图像并直观感知它们的变化规律,逐步提升直观现象和数学抽象等核心素养;知道指数函数在生活生产中的部分应用,并能分析与解决相关的简单的数学或实际问题,不断提升数学运算和数学建模等核心素养。

#### 二、重点、难点

1. 在理解指数函数定义的基础上分析指数函数的图像和性质

2. 底数  $a$  的变化对指数函数值的影响。

#### 三、导学流程

#### 【知识点 1 指数函数的概念】

##### 1. 指数函数的定义

(1)一般地,函数  $y=a^x$  ( $a>0$ ,且  $a\neq 1$ )叫做指数函数,其中指数  $x$  是自变量,定义域是  $\mathbf{R}$ .

(2)指数函数  $y=a^x$  ( $a>0$ ,且  $a\neq 1$ )解析式的结构特征:

①  $a^x$  的系数为 1; ②底数  $a$  是大于 0 且不等于 1 的常数.

#### 【题型 1 指数函数的判定】

【例 1】下列函数是指数函数的是 ( )

- A.  $y=x^4$       B.  $y=3\cdot 2^x$       C.  $y=\pi^x$       D.  $y=(-4)^x$

【变式 1-1】给出下列函数:① $y=x^{\frac{1}{3}}$ ;② $y=(-3)^x$ ;③ $y=-3^x$ ;④ $y=(\pi-3)^x$ .其中指数函数的个数为 ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

【变式 1-2】下列函数:① $y=3^{x^2}$ ;② $y=6^x$ ;③ $y=6\cdot 2^x$ ;④ $y=8^x+1$ ;⑤ $y=-6^x$ .其中一定为指数函数的有 ( ) A. 0 个      B. 1 个      C. 2 个      D. 3 个

【变式 1-3】下列函数中,不能化为指数函数的是 ( )

- A.  $y=2^x\cdot 3^x$       B.  $y=2^{x-1}$       C.  $y=3^{2x}$       D.  $y=4^{-x}$

#### 【题型 2 根据函数是指数函数求参数】

【例 2】若函数  $f(x)=(a^2+2a-2)(a+4)^x$  为指数函数,则 ( )

- A.  $a=1$  或  $a=-3$       B.  $a>0$  且  $a\neq 1$       C.  $a=1$       D.  $a=-3$

【变式 2-1】若函数  $y=(m^2-m-1)\cdot m^x$  是指数函数,则  $m$  等于 ( )

- A. -1 或 2      B. -1      C. 2      D.  $\frac{1}{2}$

【变式 2-2】如果函数  $f(x)=2a\cdot 3^x$  和  $g(x)=2^{x-(b+3)}$  都是指数函数,则  $a^b=( )$

- A.  $\frac{1}{8}$       B. 1      C. 9      D. 8

【变式 2-3】已知指数函数  $f(x) = (2a^2 - 5a + 3)a^x$  在  $R$  上单调递增, 则  $a$  的值为 ( )

- A. 3                      B. 2                      C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{3}{2}$

### 【题型 3 求指数函数的函数值或解析式】

【例 3】若函数  $f(x)$  是指数函数, 且  $f(-2) = \frac{1}{3}$ , 则 ( )

- A.  $f(x) = 3^x$       B.  $f(x) = (\sqrt{3})^x$       C.  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$       D.  $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x$

【变式 3-1】函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象经过点  $P\left(3, \frac{1}{27}\right)$ , 则  $f(-2) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{9}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D. 9

【变式 3-2】若函数  $f(x)$  是指数函数, 且  $f(2) = 2$ , 则  $f(x) =$  ( )

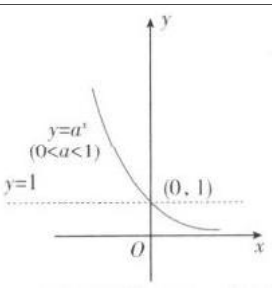
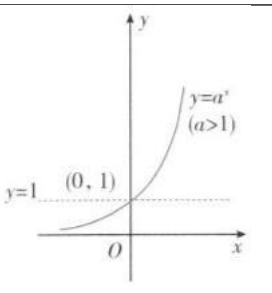
- A.  $(\sqrt{2})^x$                       B.  $2^x$                       C.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$                       D.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$

【变式 3-3】函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象经过点  $P(3, 27)$ , 则  $f(2) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{9}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D. 9

### 【知识点 2 指数函数的图象与性质】

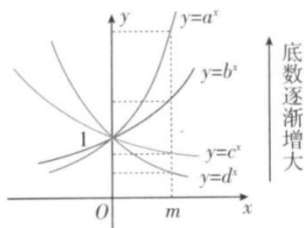
#### 1. 指数函数的图象与性质

		$0 < a < 1$	$a > 1$
图象			
性质	定义域	$R$	
	值域	$(0, +\infty)$	
	过定点	图象过定点 $(0, 1)$ , 即当 $x=0$ 时, $y=1$	
	单调性	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数
	函数值的变化范围	当 $x < 0$ 时, $y > 1$	当 $x < 0$ 时, $0 < y < 1$
		当 $x = 0$ 时, $y = 1$	当 $x = 0$ 时, $y = 1$
		当 $x > 0$ 时, $0 < y < 1$	当 $x > 0$ 时, $y > 1$

#### 2. 底数对指数函数图象的影响

指数函数  $y = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的底数对图象的影响可以从不同角度来记忆理解.

(1) 无论是  $a > 1$  还是  $0 < a < 1$ , 在第一象限内, 自下而上, 图象越高的指数函数的底数越大, 即“底大图高”.



$a^m > b^m > c^m > d^m$  (特别地,  $m=1$  时,  $a > b > c > d$ ).

(2) 左右比较: 在直线  $y=1$  的上面,  $a > 1$  时,  $a$  越大, 图象越靠近  $y$  轴;  $0 < a < 1$  时,  $a$  越小, 图象越靠近  $y$  轴.

(3) 上下比较: 比较图象与直线  $x=1$  的交点, 交点的纵坐标越大, 对应的指数函数的底数越大.

### 3. 比较指数幂的大小的方法

比较指数幂的大小的方法(分三种情况):

(1) 底数相同, 指数不同: 利用指数函数的单调性来判断;

(2) 底数不同, 指数相同: 利用底数不同的指数函数的图象变化规律来判断;

(3) 底数不同, 指数不同: 通过中间量来比较, 一般引入中间量“1”.

#### 【题型 4 比较指数幂的大小】

【例 4】已知  $a = \left(\frac{4}{3}\right)^{-0.1}$ ,  $b = \left(\frac{3}{4}\right)^{-0.1}$ ,  $c = \sqrt[5]{-3}$ , 则 ( ).

- A.  $b > c > a$       B.  $b > a > c$       C.  $a > b > c$       D.  $c > b > a$

【变式 4-1】已知  $a = 2^{0.2}$ ,  $b = 2^{-1}$ ,  $c = 1$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( ).

- A.  $a > c > b$       B.  $b > a > c$       C.  $c > a > b$       D.  $a > b > c$

【变式 4-2】已知  $\left(\frac{3}{2}\right)^{-0.3}$ ,  $b = 1.1^{0.7}$ ,  $c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ , 将  $a, b, c$  按照从小到大的顺序排列为 ( ).

- A.  $c, b, a$       B.  $b, a, c$       C.  $c, a, b$       D.  $b, c, a$

【变式 4-3】设  $a = 0.8^{0.8}$ ,  $b = 0.8^{0.9}$ ,  $c = 0.9^{0.8}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( ).

- A.  $c > b > a$       B.  $a > b > c$       C.  $a > c > b$       D.  $c > a > b$

#### 【题型 5 解指数不等式】

【例 5】已知函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 且  $f(x)$  的图象过点  $A(2, 2)$ .

(1) 求  $f(x)$  的解析式;

(2) 若  $f(2m^2 - 1) < f(m + 2)$ , 求实数  $m$  的取值范围.

【变式 5-1】已知指数函数  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象过点  $(-2, 9)$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式;

(2) 若  $f(2m - 1) - f(m + 3) > 0$ , 求实数  $m$  的取值范围.

【变式 5-2】已知函数  $f(x) = a \cdot b^x$  的图像经过点  $A(1,2)$ ,  $B(2,4)$ .

(1)求  $f(x)$  的解析式;

(2)解不等式  $f(x^2 + 3x) > f(4)$ .

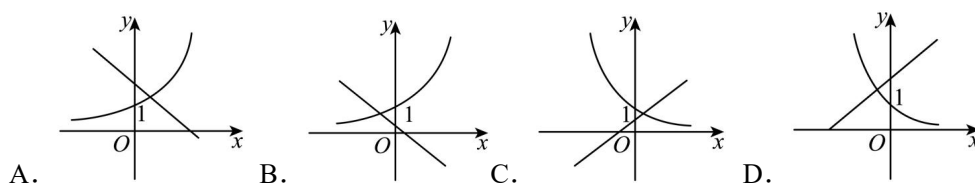
【变式 5-3】已知函数  $f(x) = a^x + b$  ( $0 < a < 1$ ) 的图象经过点  $(0, -1)$ .

(1)求实数  $b$ ;

(2)若  $f(x^2 - 2x) < f(3)$ , 求  $x$  的取值集合.

### 【题型 6 指数函数的图象及应用】

【例 6】17. 若  $a > 1$ , 则函数  $f(x) = a^x$  与  $g(x) = -x + a$  的图象大致是 ( )



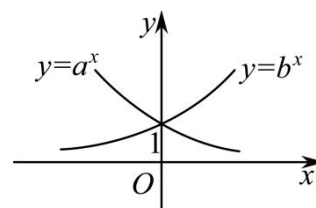
【变式 6-1】指数函数  $y = a^x$  与  $y = b^x$  的图象如图所示, 则 ( )

A.  $a < 0, b > 0$

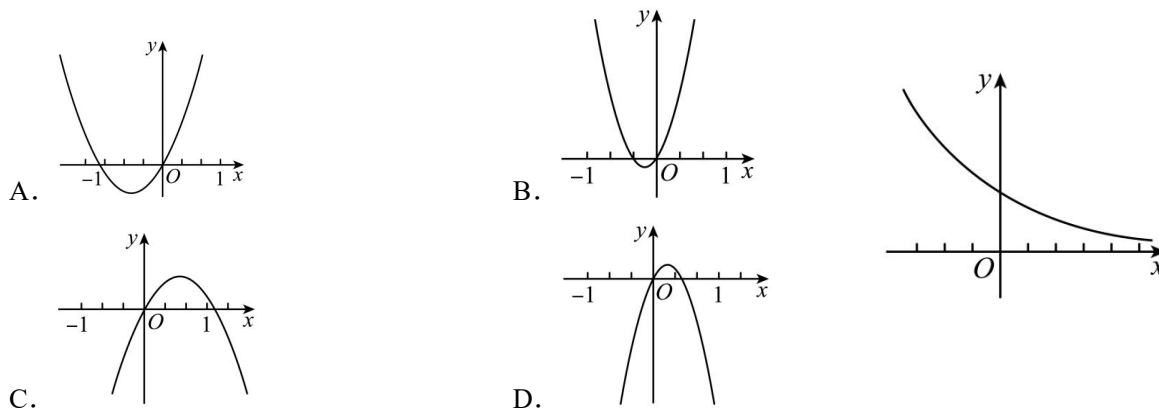
B.  $0 < a < 1, 0 < b < 1$

C.  $0 < a < 1, b > 1$

D.  $a > 1, 0 < b < 1$



【变式 6-2】指数函数  $y = \left(\frac{b}{a}\right)^x$  的图象如图所示, 则二次函数  $y = ax^2 + bx$  的图象可能是 ( )



【变式 6-3】如图中，①②③④中不属于函数 $y = 3^x$ ， $y = 2^x$ ， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 中一个的是（ ）

A. ①

B. ②

C. ③

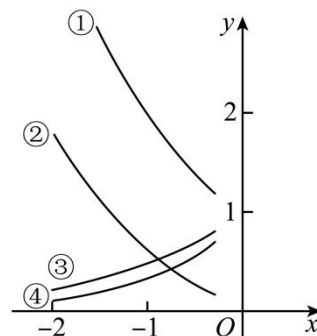
D. ④

【题型 7 指数型复合函数的应用】

【例 7】已知函数 $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ .

(1)求 $f(2)$ 的值，判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明；

(2)求不等式 $|f(x)| > \frac{3}{2}$ 的解集.



【变式 7-1】已知函数 $y = 4^x - 2^{x+1} + 2$ ， $x \in [-1, 2]$ .

(1)设 $t = 2^x$ ，求 $t$ 的取值范围；

(2)求函数 $y = 4^x - 2^{x+1} + 2$ 的最值，并求出取得最值时对应的 $x$ 的值.

【变式 7-2】已知函数 $f(x) = a^x - a^{-x}$  ( $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ )，且 $f(1) = \frac{3}{2}$ .

(1)求 $a$ ；

(2) $f(2t) + f(t-1) < 0$ ，求 $t$ 的取值范围.

【变式 7-3】设函数 $f(x) = ka^x - 2a^{-x}$  ( $a > 0$ ， $a \neq 1$ ， $k \in \mathbf{R}$ )， $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数

(1)确定 $k$ 的值

(2)若 $f(1) = 3$ ，判断并证明 $f(x)$ 的单调性；

(3)若 $a = 3$ ，使得 $2f(2x) \leq (\lambda + 1)f(x)$ 对一切 $x \in [-2, -1]$ 恒成立，求出 $\lambda$ 的范围.

**【题型 8 指数函数的实际应用】**

**【例 8】**据报道, 全球变暖使北冰洋冬季冰雪覆盖面积在最近 50 年内减少了 5%, 如果按此速度, 设 2022 年的冬季冰雪覆盖面积为  $a$ , 从 2022 年起, 经过  $x$  年后, 北冰洋冬季冰雪覆盖面积  $y$  与  $x$  的函数关系式是 ( )

A.  $y = 0.9^{50-x} \cdot a$

B.  $y = \left(1 - 0.05^{\frac{x}{50}}\right) \cdot a$

C.  $y = 0.95^{\frac{x}{50}} \cdot a$

D.  $y = \left(1 - 0.05^{50-x}\right) \cdot a$

**【变式 8-1】**(2023·高一课时练习) 某地下车库在排气扇发生故障的情况下, 测得空气中一氧化碳的含量达到了危险状态, 经抢修后恢复正常. 排气 4 分钟后测得车库内一氧化碳浓度为 64 ppm (ppm 为浓度单位, 1 ppm 表示百万分之一), 经检验知, 该地下车库一氧化碳浓度  $y$  (ppm) 与排气时间  $t$  (分钟) 之间存在函数关系  $y = 2^{7-mt}$  ( $m$  为常数). 若空气中一氧化碳浓度不高于 0.5 ppm 为正常, 则这个地下车库中一氧化碳含量达到正常状态至少需要排气的时间是 ( )

A. 8 分钟

B. 16 分钟

C. 32 分钟

D. 64 分钟

**【变式 8-2】**(2023·全国·高一专题练习) 现有某种细胞 1 个, 该细胞每小时分裂一次, 即由 1 个细胞分裂成 2 个细胞, 依此规律, 若该细胞分裂  $x$  h 后, 写出得到的细胞个数  $y$  关于  $x$  的函数解析式. 若细胞总数量超过 2048 个, 则至少要经过几小时的分裂?

**【变式 8-3】**牛奶保鲜时间因储藏时温度的不同而不同, 假定保鲜时间与储藏温度间的关系为指数型函数, 若牛奶放在  $0^{\circ}\text{C}$  的冰箱中, 保鲜时间约是 192h, 而在  $22^{\circ}\text{C}$  的厨房中则约是 42h.

(1) 写出保鲜时间  $y$  (单位: h) 关于储藏温度  $x$  (单位:  $^{\circ}\text{C}$ ) 的函数解析式;

(2) 利用 (1) 中结论, 指出温度在  $30^{\circ}\text{C}$  和  $16^{\circ}\text{C}$  的保鲜时间; (参考数据  $\left(\frac{7}{32}\right)^{\frac{15}{11}} \approx 0.125$ ,  $\left(\frac{7}{32}\right)^{\frac{8}{11}} \approx 0.328$ , 精确到 1h)

(3) 运用上面的数据, 作此函数的图象.